Seminar *Integrable Systeme und das KAM-Theorem*

Vortrag 12 und 13: Das KAM-Theorem mit Parametern nach Jürgen Pöschel - Die grobe Idee

Gabriele Benedetti

20. Februar 2019

1 Das Setting

1.1 Die Aussage

Wir wiederholen kurz das Setting, das im Vortrag 11 eingeführt wurde. Es sei $H : B_r^n \times \mathbb{T}^n \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine reelle analytische Funktion derart

$$H(I,\theta,\omega) = N(I,\omega) + P(I,\theta,\omega), \qquad N(I,\omega) := \langle I,\omega\rangle, \qquad (I,\theta,\omega) \in B_r^n \times \mathbb{T}^n \times \Omega,$$

wobei $B_r^n \subset \mathbb{R}^n$ der offene euklidische Ball von Radius r um den Ursprung, $\mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ der n-dimensionale Torus und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge sind. Wir schreiben einfach H_ω, wenn wir die Variabel ω festlegen. Es seien $\alpha \in (0,1)$ und $\tau > n+1$ gegeben. Wir definieren die stark nicht resonanten Frequenzen in Ω von Typ (α,τ):

$$\Omega_\alpha^\tau := \Big\{ \omega \in \Omega \mid |\omega - \partial\Omega| < \alpha, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\},\ |\langle \omega, k\rangle| \geq \frac{\alpha}{|\tau|^{n-1}} \Big\}$$

Wir haben gesehen, dass das Maß von $\Omega \setminus \Omega_\alpha^\tau$ der Ordnung $O(\alpha)$ ist aber Ω_α^τ hat leeres Innere. Also betrachen wir die folgende offene Annährung von Ω_α^τ:

$$O_h := \big\{ \omega \in \mathbb{R}^n \mid |\omega - \Omega_\alpha^\tau| < h \big\} \subset \Omega, \qquad h \in (0,\alpha).$$

Da H reell analytisch ist, existiert eine Erweiterung von H als *beschränkte* complex analytische Funktion auf eine komplexifizierte Umgebung von $B_r^n \times \mathbb{T}^n \times O_h$. Bis auf dem Einschränken von r und h lässt sich diese Umgebung als $B_r^n \times \mathbb{T}_s^n \times O_h$ mit $s > 0$ schreiben, wobei $B_n^r, O_h \subset \mathbb{C}^n$ der Ball und die h-Umgebung von Ω_α im complexen Vektorraum sind und

$$\mathbb{T}_s^n := \big\{ \theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n \mid \forall\, j = 1,\ldots,n,\ |\Im\theta_j| < s \big\}.$$

Wir schreiben $D_{r,s} := B_r^n \times \mathbb{T}_s^n$ und $|\cdot|_{r,s,h}$ die Supremum-Norm von Funktionen auf $D_{r,s} \times O_h$.

Wir können nun die Aussage des KAM-Theorems formulieren.

Satz 1.1. *Es gibt eine Konstante $E = E(n,\tau)$, sodass wenn*

$$|P|_{r,s,h} \le E\alpha r s^{\tau+n}, \qquad \frac{3}{12^{\tau+n}}\alpha s^{\tau+n}\sqrt{E} \tag{1.1}$$

dann existiert eine Lipschitz-Einbettung $\varphi : \Omega_\alpha^\tau \to \Omega$ und eine Lipschitz-Familie $\omega \in \Omega_\alpha^\tau \mapsto L_\omega : \mathbb{T}^n \to B_r^n \times \mathbb{T}^n$ von reellen analytischen Lagrange Tori mit complexer analytischer Erweiterung auf $\mathbb{T}_{s/2}^n$. Der Torus L_ω ist invariant für $H_{\varphi(\omega)}$ mit Rotationsvektor ω. Die Lipschitz-Bedingung lässt sich genauer formulieren als

- $\max\left\{h^{-1}|(\varphi - \mathrm{id})|_{\Omega_\alpha^\tau},\ |\varphi - \mathrm{id}|_{\mathcal{L},\Omega_\alpha^\tau}\right\} \le \dfrac{c}{rh}|P|_{r,s,h},$
- $\max\left\{s^{-1}|W(L_\omega - L_\omega^0)|_{\frac{s}{2},\Omega_\alpha^\tau},\ |W(L_\omega - L_\omega^0)|_{\mathcal{L},\frac{s}{2},\Omega_\alpha^\tau}\right\} \le \dfrac{c}{\alpha r s h}|P|_{r,s,h},$

wobei $c = c(n,\tau) > 0$ eine Konstante mit $3c\sqrt{E} < 12^{\tau+n}$ ist, $|\cdot|$, $|\cdot|_{\mathcal{L}}$ die Uniform-Norm und die Lipschitz-Konstante gekennzeichnen, und W die Matrix $\mathrm{diag}(r^{-1}\mathrm{id}, s^{-1}\mathrm{id})$ ist.

1.2 Wir brauchen eine magische Folge

Wir betrachten nun streng monoton fallende Folgen (r_j), (s_j) und (h_j), so dass

$$r_0 = r, \quad s_0 = s, \quad h_0 = h, \qquad r_j \downarrow 0, \quad s_j \downarrow s/2, \quad h_j \downarrow 0$$

und setzen $D_j \times O_j := D_{r_j,s_j} \times O_{h_j}$ und $|\cdot|_j := |\cdot|_{r_j,s_j,h_j}$.

Für den Beweis werden wir die Folgen geschickt wählen. Insbesondere wollen wir entsprechende Einbettungen

$$\mathcal{G}^j : D_j \times O_j \to D_{r,s} \times O_h, \qquad \mathcal{G}_0 := \mathrm{id},$$

sodass die ω-Koordinate nur von der ω-Koordinate abhängt:

$$\mathcal{G}^j = (\Phi^j, \varphi^j), \qquad \Phi^j : D_j \times O_j \to D_{r,s}, \qquad \varphi^j : O_j \to O_h.$$

Außerdem werden wir auch verlangen:

$$\Phi_\omega^j \ \text{ symplektisch } \ \forall\, \omega \in O_j.$$

Wir werden $\mathcal{G}^j$ so bilden, dass ein $\mathcal{G} = (\Phi, \varphi) : 0 \times \mathbb{T}_{s/2}^n \times \Omega_\alpha^\tau \to D_{r,s} \times O_h$ existiert mit

$$\lim_{j\to\infty} \left|\mathcal{G} - \mathcal{G}^j\right|_{0,s/2,0} = 0.$$

Wir bekommen dazu eine Folge von Hamiltonschen Funktionen

$$H^j := H \circ \mathcal{G}^j = e_j + N + P_j, \qquad e_j : O_j \to \mathbb{C}, \qquad P_j : D_j \times O_j \to \mathbb{C}.$$

Wir verlangen auch, dass
$$\lim_{j\to\infty} |\mathrm{d}P_j|_{0,s/2,0} = 0.$$
Dann für alle $\omega \in \Omega_\alpha^\tau$ haben wir die Folge von reell analytischen Tori
$$L_\omega^j : \mathbb{T}^n \to B_r^n \times \mathbb{T}^n, \qquad L_\omega^j(\theta) = \Phi_\omega^j(0,\theta),$$
die gegen den Torus $L_\omega : \mathbb{T}^n \to B_r^n \times \mathbb{T}^n$, $L_\omega(\theta) = \Phi_\omega(0,\theta)$ in C^1 konvergiert. Daraus folgt, dass L_ω reell analytisch, Lagrange und invariant unter dem Fluß von $H_{\varphi(\omega)}$ mit einer zu der Translation durch ω konjugierten Dynamik ist. Für die Lagrange-Bedingung rechnen wir
$$L_\omega^*(\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}\theta) = \lim_{j\to\infty}(L_\omega^j)^*(\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}\theta) = \lim_{j\to\infty}(L_\omega^0)^*(\Phi_\omega^j)^*(\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}\theta) = \lim_{j\to\infty}(L_\omega^0)^*(\mathrm{d}I \wedge \mathrm{d}\theta) = 0,$$
weil L_ω^0 offensichtlich Lagrange ist.

Was die Invarianz angeht, folgt aus $H^j = H \circ \mathcal{G}^j$, dass $H_\omega^j = H_{\varphi(\omega)} \circ \Phi_\omega$. Also
$$\mathrm{d}_{(0,\theta)}\Phi_\omega^j \cdot X_{H_\omega^j}(0,\theta) = X_{H_{\varphi^j(\omega)}}(L_\omega^j(\theta)), \qquad \forall\, \theta \in \mathbb{T}^n.$$
Die linke Seite konvergiert nach $\mathrm{d}_{(0,\theta)}\Phi_\omega \cdot X_{N_\omega}(0,\theta) = \mathrm{d}_\theta L_\omega \cdot \omega$ und die rechte Seite gegen $X_{H_{\varphi(\omega)}}(L_\omega(\theta))$, sodass
$$\mathrm{d}L_\omega \cdot \omega = X_{H_{\varphi(\omega)}}(L_\omega),$$
wie gewünscht.

1.3 Induktive Definition der Folge

Wir werden die Folge $\mathcal{G}^j$ als Verkettung definieren. Also sind Einbettungen
$$\mathcal{F}^j = (\Psi, \psi) : D_{j+1} \times O_{j+1} \to D_j \times O_j$$
zu finden, sodass $\mathcal{G}^j := \mathcal{F}^0 \circ \ldots \circ \mathcal{F}^{j-1}$ die obigen Eigenschaften besitzt. Wir werden $\mathcal{F}^0$ in Abhängigkeit von $H = H^0$ als Lösung eines linearen Problems konstruieren. Dann wird $H^1 = H^0 \circ \Psi_\omega$ und wir werden diese Verfahren wiederholen, sodass für alle $j \in \mathbb{N}$ F^j durch H^j bestimmt ist und H^{j+1} durch $\mathcal{F}^j$ und H^j.

Wir führen im nächsten Abschnitt den allgemeinen Induktionschritt durch. Im übernächsten Abschnitt leiten wir aus den allgemeinen Schritt die Existenz von Folgen (r_j, s_j, h_j) her, für die (**??**) gelten.

2 Der allgemeine Schritt

2.1 Supremum-Norm und Fourier-Koeffizienten

Es seien $\nu \geq 0$ und $s \in (0,1)$. Wenn $u : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ definieren wir
$$|u|_{\nu,s} := \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} |\hat{u}(k)| \frac{e^{2\pi s|k|}}{|k|s^\nu}.$$

Es sei weiter

$$v : Z_s \to \mathbb{C}, \qquad v(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{u}(k) e^{2\pi i k z}$$

die komplexe Erweiterung von u, sodass u die Einschränkung von v auf $\mathbb{T}^n$ ist. Schließlich setzen wir für alle $K \in (0,\infty]$

$$u_K : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}, \qquad u_K(x) = \sum_{|k|<K} \hat{u}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Es gelten die Abschätzungen

$$|u_K|_{0,s} \le |v|_s, \qquad |v - v_K|_{s-\sigma} \le c\frac{e^{-\pi K\sigma}}{\sigma^{\nu+n}}|u|_{\nu,s} \tag{2.1}$$

für eine von n und ν abhängige Konstante c. Ähnliche Formeln gelten für $u : B_r \to \mathbb{C}$.

2.2 Die 6 Teilschritte

Es seien $0 < s_1 < s < 1$, $0 < r_1 < r < 1$, $h > 0$ und $K > 0$. Es seien $\sigma := \frac{1}{3}(s - s_1)$, $\eta := r_1/r$ und setzen $h_1 := h/2^{\tau+n}$. Wir nehmen an, dass

$$\eta < \frac{1}{3}, \quad K^\tau \le \frac{\alpha}{2h}, \quad c|P|_{r,s,h} \le r\frac{h}{3}, \quad e^{-\pi K\sigma} \le \sigma^n, \quad c|P|_{r,s,h} \le \alpha\eta r\sigma^{\tau+n}. \tag{2.2}$$

Wir betrachten $H : D_{r,s} \times O_h \to \mathbb{C}$, wobei $H = e + N + P$ und P reell analytisch und beschränkt ist.

2.2.1 Die Funktion P abschneiden

Wir schreiben

$$P = Q + \Delta_2^{\text{Taylor}}, \qquad Q = R + \Delta_K^{\text{Fourier}},$$

wobei Q die Taylor-Entwicklung von P in der I-Variable in $I = 0$ ist und R die Summe der Fourier-Koeffizienten von Q mit Index $k \in \mathbb{Z}^n$, $|k| < K$ ist.

Wir benutzen den Integralrest und (2.1), um zu finden

$$|\Delta_2^{\text{Taylor}}|_{2\eta r,s,h} \le c\eta^2 |P|_{r,s,h}, \qquad |Q|_{r,s,h} \le c|P|_{r,s,h}.$$

Um R abzuschätzen, benutzen wir nochmal (2.1) und auch (2.2):

$$|\Delta_K^{\text{Fourier}}|_{r,s-\sigma,h} \le c\frac{e^{-\pi K\sigma}}{\sigma^n}|P|_{r,s,h}, \qquad |R|_{r,s-\sigma,h} \le c|P|_{r,s,h}. \tag{2.3}$$

2.2.2 Abschätzung für Elemente in O_h

Für $\omega \in O_h$ folgt aus (2.2), dass

$$|\langle \omega, k\rangle| \ge \frac{\alpha}{2|k|^{\tau-1}}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^n,\ |k| \le K,$$

denn ein $\omega_* \in \Omega_\alpha^\tau$ existiert mit $|\omega - \omega_*| < h$ und

$$|\langle \omega, k\rangle| \ge |\langle \omega_*, k\rangle| - |\omega - \omega_*||k| \ge \alpha|k|^{\tau-1} - h|k| \ge \alpha|k|^{\tau-1} - \alpha|k|^{\tau-1}/2.$$

2.2.3 Linearisierte Gleichung

Wir definieren $\Psi = \mathfrak{F}_F^1$ als der Fluß zur Zeit 1 einer Hamiltonschen Funktion $F : D_{2\eta r, s-\frac{\sigma}{2}} \times O_{2\theta h} \to \mathbb{R}$, die wir jetzt bestimmen. Wir entwickeln für jedes (z, ω) die Funktion $t \mapsto H \circ \mathfrak{F}_F^t(z, \omega)$ um $t = 0$ und benutzen den Lagrange-Restglied

$$\begin{aligned} H^1 = H \circ \Psi = e + N \circ \Psi + P \circ \Psi = e + N + \{N, F\} + \frac{1}{2}\{\{N, F\}, F\} \circ \mathfrak{F}_F^{t_1} + R \\ + \{R, F\} \circ \mathfrak{F}_F^{t_2} + (\Delta_2^{\text{Taylor}} + \Delta_K^{\text{Fourier}}) \circ \Psi, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei $t_1, t_2 \in [0, 1]$ unbekannte Funktionen sind. Es sei nun F die Lösung der Gleichung

$$\{F, N\} = R - [R], \tag{2.5}$$

wobei

$$[R](I, \omega) = [P|_{I=0}](\omega) + [\partial_I P|_{I=0}](\omega) I$$

und rechts haben wir die Integrale von P und $\partial_I P$ auf dem Torus $\theta \mapsto (0, \theta, \omega)$. Dann lässt sich die Lösung F formal schreiben als

$$F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{\hat{R}(k)}{\langle \omega, k \rangle} e^{2\pi i k z}.$$

Da R linear in I ist, gilt das auch für F. Insbesondere $\partial_{II}^2 F = 0$.

2.2.4 Parameterwechsel

Wir haben aus der Definition

$$\Big|[P|_{I=0}]\Big|_h \le |P|_{r,s,h}, \qquad \Big|[\partial_I P|_{I=0}]\Big|_h \le c\frac{|P|_{r,s,h}}{r}, \qquad \Big|\partial_\omega[\partial_I P|_{I=0}]\Big|_{2h/3} \le c\frac{|P|_{r,s,h}}{hr}. \tag{2.6}$$

Nach (2.2) ist die Funktion $\omega \mapsto \omega + [\partial_I P|_{I=0}](\omega)$ invertierbar auf $O_{h/3}$ und wir schreiben $\psi : O_{h/3} \to O_{2h/3}$ für ihre Inverse. Es gilt

$$\max\left\{\frac{1}{h}|\mathrm{id} - \psi|_{h/3},\ |1 - \partial_\omega \psi|\right\} < c\frac{|P|_{r,s,h}}{rh}. \tag{2.7}$$

Wir schätzen nun die Lipschitzkonstante von $\psi - \mathrm{id}$ auf $O_{h/6}$ ab. Es seien $\omega_1, \omega_2 \in O_{h/6}$. Wenn $|\omega_1 - \omega_2| \ge h/3$, dann

$$\frac{|(\psi - \mathrm{id})(\omega_1) - (\psi - \mathrm{id})(\omega_2)|}{|\omega_1 - \omega_2|} \le \frac{2|\psi - \mathrm{id}|_{h/6}}{h/3} \le c\frac{|P|_{r,s,h}}{hr}.$$

Wenn $|\omega_1 - \omega_2| \le h/3$ ist die Strecke $t \mapsto (1-t)\omega_1 + t\omega_2$ in $O_{h/3}$ enthalten und wir bekommen durch den Mittelwertsatz

$$\frac{|(\psi - \mathrm{id})(\omega_1) - (\psi - \mathrm{id})(\omega_2)|}{|\omega_1 - \omega_2|} \le c\frac{|P|_{r,s,h}}{hr}.$$

Also haben wir

$$||\psi - \mathrm{id}||_{\frac{h}{6}} := \max\Big\{\frac{1}{h}|\mathrm{id} - \psi|_{\frac{h}{3}},\ |\psi - \mathrm{id}|_{\mathcal{L},\frac{h}{6}}\Big\} \leq c\frac{|P|_{r,s,h}}{hr},$$

wobei $|\psi - \mathrm{id}|_{\mathcal{L},\frac{h}{6}} := \sup_{\omega_1,\omega_2\in O_{\frac{h}{6}}} \frac{|(\psi-\mathrm{id})(\omega_1)-(\psi-\mathrm{id})(\omega_2)|}{|\omega_1-\omega_2|}$. Wir setzen außerdem

$$e_1 := \Big(e + [P|_{I=0}]\Big) \circ \psi$$

und wir haben

$$||e_1 - e||_{\frac{h}{6}} \leq c(||e||_h + 1)\frac{|P|_{r,s,h}}{rh},$$

wobei die Lipschitz-Konstante durch einen Fallunterschied wie oben abgeschätzt wird. Wenn wir $d := ||e||_h + 1$ und $d_1 := ||e_1||_{h/6} + 1$ setzen, folgern wir aus der Dreiecksungleichung

$$d_1 \leq \Big(1 + c\frac{|P|_{r,s,h}}{rh}\Big)d. \tag{2.8}$$

2.2.5 Neue Koordinaten

Nach unserer Wahl von F haben wir die Abschätzung der Fourier-Norm

$$|F|_{\tau-1,s-\sigma} \leq c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha}.$$

Daraus folgt die Abschätzung der Supremum-Norm

$$\max\Big\{\frac{|F|_{r,s-2\sigma,h}}{r\sigma},\ \frac{|\partial_I F|_{\frac{r}{2},s-2\sigma,h}}{\sigma},\ \frac{|\partial_\theta F|_{r,s-2\sigma,h}}{r},\ |\partial^2_{I\theta}F|_{\frac{r}{2},s-2\sigma,h},\ \frac{\sigma}{r}|\partial^2_{\theta\theta}F|_{r,s-2\sigma,h}\Big\} \leq c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}.$$

Das Hamiltonsche Vektorfeld von F lässt sich als $X_F = (-\partial_\theta F, \partial_I F)$ in der (I,θ)-Koordinaten schreiben. Nach der obigen Abschätzungen und (2.2) haben wir

$$\max\Big\{\frac{1}{\eta r}|\partial_\theta F|_{2\eta r,s-2\sigma,h}, \frac{1}{\sigma}|\partial_I F|_{2\eta r,s-2\sigma,h}\Big\} \leq 1$$

Es folgt daraus, dass die Abbildung Ψ auf $D_{r_1,s_1} \times O_h$ wohl definiert ist und dass wir genauer $\mathfrak{F}^t_F : D_{r_1,s_1} \times O_h \to D_{2\eta r,s-2\sigma}$ für $t \in [0,1]$ haben. Wir schätzen nun $\mathrm{d}\Psi$ ab. Dieses Differential genügt der linearen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot\Psi^I_I & \dot\Psi^I_\theta \\ 0 & \dot\Psi^\theta_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial^2_{I\theta}F & \partial^2_{\theta\theta}F \\ 0 & -\partial^2_{I\theta}F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^I_I & \Psi^I_\theta \\ 0 & \Psi^\theta_\theta \end{pmatrix},$$

die wir als

$$\dot\Psi^I_I = \partial^2_{I\theta}F \cdot \Psi^I_I, \qquad \dot\Psi^\theta_\theta = -\partial^2_{I\theta}F \cdot \Psi^\theta_\theta, \qquad \dot\Psi^I_\theta = \partial^2_{I\theta}F \cdot \Psi^I_\theta + \partial^2_{\theta\theta}F \cdot \Psi^\theta_\theta.$$

umschreiben. Nun kann die Supremum-Norm von $\mathrm{d}\Psi - \mathrm{id}$ durch das Gronwall-Lemma abgeschätzt werden:

$$\max\left\{|\Psi_I^I - \mathrm{id}|_{r_1,s_1,h},\ |\Psi_\theta^\theta - \mathrm{id}|_{r_1,s_1,h},\ \frac{\sigma}{r}|\Psi_\theta^I|_{r_1,s_1,h}\right\} \le c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}},$$

wobei wir genutzt haben, dass $|\partial_{I\theta}^2 F|_{r_1,s_1,h} < 1/3$ nach (2.2) ist. Wir definieren die Matrix $W := \mathrm{diag}(r^{-1}\mathrm{id}, \sigma^{-1}\mathrm{id})$, wobei id die Identitätsmatrix in $\mathbb{R}^n$ ist. Wir können dann die obigen Abschätzungen in folgender kompakteren Form zusammenfassen:

$$\max\left\{|W(\Psi - \mathrm{id})|_{r_1,s_1,h},\ |W(\mathrm{d}\Psi - \mathrm{id})W^{-1}|_{r_1,s_1,h}\right\} \le c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}.$$

Wir möchten nun die Lipschitz-Konstante der Abbildung $(x,\omega) \to \Psi(x,\omega) - \Psi_0(x,\omega)$ abschätzen. Zu diesem Zweck bemerken wir, dass

$$|WX_F| < c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}},$$

sodass die Lipschitz-Konstante von WX_F in der Variable ω nach der Cauchy-Formel und einem Argument wie im vorherigen Abschnitt den folgenden oberen Schranke besitzt

$$|WX_F|_{\mathcal{L},\frac{h}{6}} < \frac{c}{h}\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}.$$

Eine Anwendung des Gronwall-Lemmas liefert die Lipschitz-Abhängigkeit von dem Fluß von F mit Lipschitz-Konstante

$$|WX_F|_{\mathcal{L},\frac{h}{6}} < \frac{c}{h}\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}. \tag{2.9}$$

Wir können nun die gesamte Lipschitz-Konstante von $\Psi - \Psi^0$ bezüglich der Metriken $|W\cdot|$ und $|\bar{W}\cdot|$ berechnen, wobei $\bar{W} = \mathrm{diag}(r^{-1}\mathrm{id}, \sigma^{-1}\mathrm{id}, h^{-1}\mathrm{id})$. Es gilt

$$|\Psi - \Psi^0|_{W,\mathcal{L},r_1,s_1,\frac{h}{6}} < c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}.$$

Daher

$$||\Psi - \Psi^0||_{r_1,s_1,\frac{h}{6}} := \max\left\{|\Psi - \Psi^0|_{W,r_1,s_1,\frac{h}{6}},\ |\Psi - \Psi^0|_{W,\mathcal{L},r_1,s_1,\frac{h}{6}}\right\} < c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}.$$

2.2.6 Neue Abweichung

Nach unserem Wahl von F und dem Parameterwechsel wird die Entwicklung (2.4) zu

$$H^1 = e_1 + N + P_1, \tag{2.10}$$

wobei

$$P_1 := \frac{1}{2}\{[R] - R, F\} \circ \mathfrak{F}_F^{t_1} + \{R, F\} \circ \mathfrak{F}_F^{t_2} + (\Delta_2^{\text{Taylor}} + \Delta_K^{\text{Fourier}}) \circ \Psi.$$

Es gilt

$$\Big|\frac{1}{2}\{[R]-R,F\}\circ\mathfrak{F}_F^{t_1}+\{R,F\}\circ\mathfrak{F}_F^{t_2}\Big|_{r_1,s_1,h_1}\leq\frac{1}{2}|[\partial_I P|_{I=0}]|_h|\partial_\theta F|_{2\eta r,s-2\sigma,h}$$
$$+\frac{3}{2}|\partial_I R|_{2\eta r,s-2\sigma,h}|\partial_\theta F|_{2\eta r,s-2\sigma,h}$$
$$+\frac{3}{2}|\partial_\theta R|_{2\eta r,s-2\sigma,h}|\partial_I F|_{2\eta r,s-2\sigma,h}$$

und alle die drei Termen sind kleiner als $\frac{c}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}|P|^2_{r,s,h}$. Wir folgern daraus, dass

$$|P_1|_{r_1,s_1,h/3}\leq\frac{c}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}|P|^2_{r,s,h}+c\Big(\eta^2+\frac{e^{-\pi K\sigma}}{\sigma^n}\Big)|P|_{r,s,h}. \tag{2.11}$$

3 Superlineare Konvergenz

3.1 Die richtige Parameter wählen

Wir möchten nun eine genauere Abschätzung aus die letzte Ungleichung gewinnen. Dazu müssen wir die Parameter r,σ,h,K und ϵ geschickt wählen. Wir nehmen an

$$|P|_{r,s,h}<\epsilon,$$

sodass die Cauchy-Formel die Abschätzung

$$|\mathrm{d}P|_{r,s,h}<c\frac{\epsilon}{r\sigma},$$

liefert, wobei das Differential nur bezüglich der (I,θ)-Koordinaten ist. Wir definieren

$$E:=\frac{\epsilon}{\alpha r\sigma^{\tau+n}}$$

und wir wählen

$$\eta:=\sqrt{E},\qquad h:=3\alpha\eta\sigma^{\tau+n},\qquad K:=\Big(\frac{\alpha\sigma^n}{2h}\Big)^{1/\tau}=\frac{1}{6^{\frac{1}{\tau}}E^{\frac{1}{2\tau}}\sigma}.$$

Wir bemerken, dass nur σ und daher $s_1<s$ beliebig sein dürfen. Außerdem

$$\frac{\epsilon}{rh}=\frac{\epsilon}{r3\alpha\eta\sigma^{\tau+n}}=\frac{\sqrt{E}}{3}.$$

Wir haben dann

$$\frac{e^{-\pi K\sigma}}{E\sigma^n}=\frac{e^{-\frac{\pi}{6^{1/\tau}}\frac{1}{E^{1/2\tau}}}}{E\sigma^n}=:\frac{f(E)}{\sigma^n}.$$

Wir nehmen nun E, sodass

$$\sqrt{E}<\min\Big\{\frac{1}{3},\frac{1}{4c}\Big\},\qquad\forall\, D\in[0,E],\quad\frac{f(D)}{\sigma^n}\leq 1,\qquad f(\sqrt{c}D^{3/2})\leq\frac{f(D)}{2^n}. \tag{3.1}$$

Somit sind alle die Voraussetzungen in (2.2) erfüllt. Wir führen die neue Breite $\sigma_1 := \sigma/2$ ein, sodass $s_2 = s_1 - 3\sigma_1$. Wir setzen

$$E_1 := c^{\frac{3}{2}-1} E^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{\epsilon_1}{\alpha r_1 \sigma_1^{\tau+n}} := E_1.$$

Insbesondere ist $E_1 \leq E$ und für alle $D_1 \leq E_1$ mit $D_1 =:^{\frac{3}{2}-1} D^{3/2}$ gilt

$$\frac{f(D_1)}{\sigma_1^n} = \frac{2^n f(\sqrt{c} D^{3/2})}{\sigma^n} \leq \frac{f(D)}{\sigma^n} \leq 1. \tag{3.2}$$

Außerdem

$$h_1 := 3\alpha\eta_1\sigma_1^{\tau+n} \leq 3\alpha\eta\sigma^{\tau+n}\frac{1}{2^{\tau+n}} = \frac{h}{2^{\tau+n}} \leq \frac{h}{2^{2n+1}} \leq \frac{h}{6}.$$

Die Abschätzung (2.11) wird zu

$$c\frac{|P_1|_{r_1,s_1,h_1}}{\alpha r_1 \sigma_1^{\tau+n}} \leq \left(c\frac{|P|_{r,s,h}}{\alpha r \sigma^{\tau+n}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nach der Definition von E_1 und ϵ_1 folgt, dass

$$|P_1|_{r_1,s_1,h_1} < \epsilon_1$$

und nach der Cauchy-Formel

$$|\mathrm{d}P_1|_{r_1,s_1,h_1} < c\frac{\epsilon_1}{r_1\sigma_1}$$

Daher bekommen wir einen wohl definierten Parameterwechsel $\psi : O_{h_1} \to O_h$. Wir setzen

$$\mathcal{F} : D_{r_1,s_1} \times O_{h_1} \to D_{r,h} \times O_h, \qquad \mathcal{F} := (\Psi, \psi)$$

und wir haben

$$||\mathcal{F} - \mathrm{id}||_{r_1,s_1,h_1} < \max\left\{c\frac{\epsilon}{\alpha r \sigma^{\tau+n}},\ c\frac{\epsilon}{rh}\right\} = c\frac{\epsilon}{rh},$$

bezüglich der Metrik $|\bar{W} \cdot |$.

3.2 Konvergenz der Folge

Wir wiederholen das obige Verfahren induktiv und bekommen die Folge $\mathcal{F}^j = (\Psi^j, \psi^j) : D_{j+1} \times O_{j+1} \to D_j \times O_j$ und $H^{j+1} = H^j \circ \mathcal{F}^j$, wobei $\Psi^0 = \Psi$, $\psi^0 = \psi$ und $H^0 = H$. Wir wählen nun $\sigma_0 := s_0/12$, sodass $s_j \to s_0/2$, und wir nehmen

$$\epsilon := E\alpha r_0 \sigma_0^{\tau+n}.$$

Wir haben entsprechende Folgen E_j, ϵ_j, r_j, h_j, W_j, d_j. Insbesondere

$$E_j = \frac{1}{c}(cE)^{\left(\frac{3}{2}\right)^j}$$

Da $cE < 1/2$ und $\left(\frac{3}{2}\right)^j \geq j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ finden wir durch Vergleichung mit einer geometrischen Reihe, dass

$$\sum_{j=0}^{\infty} E_j \leq cE, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \sqrt{E_j} \leq c\sqrt{E}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sqrt{E_j}}{\sigma_j} \leq c\frac{\sqrt{E}}{s}. \tag{3.3}$$

Außerdem

- $||\mathcal{F}^j - \mathrm{id}||_{j+1} \leq c\sqrt{E_j}$,
- $(i)\ \ ||e_{j+1} - e_j||_{j+1} \leq c(||e_j||_j + 1)\sqrt{E_j}, \quad (ii)\ \ d_{j+1} \leq (1 + c\sqrt{E_j})d_j$,
- $\max\left\{|P_j|_j,\ |\mathrm{d}P_j|_j\right\} \leq cE_j$.

Aus (ii) folgt es, dass die Folge $d_j = ||e_j||_j + 1$ eine obere Schranke besitzt (siehe (3.4) unten), sodass nach (i) die Folge e_j nach einer gewissenen Lipschitz-Funktion e_∞ konvergiert.

Wir definieren $\mathcal{G}^j := \mathcal{F}^0 \circ \ldots \circ \mathcal{F}^{j-1} = (\Phi^j, \phi^j)$. Wir schätzen die Lipschitz-Konstante bezüglich der Metriken $|\bar{W}_0 \cdot|$ und $\bar{W}_j \cdot|$ ab:

$$|\mathcal{G}^j|_{\mathcal{L},j} \leq \prod_{i=0}^{j-1} |\mathcal{F}^i|_{\mathcal{L},i+1} |\bar{W}_i \bar{W}_{i+1}^{-1}| \leq \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + c\sqrt{E_i}\right) \leq \exp\left(c \sum_{i=0}^{j-1} \sqrt{E_i}\right) \leq \exp(c\sqrt{E}), \tag{3.4}$$

wobei wir benutzt haben, dass $|\bar{W}_i \bar{W}_{i+1}^{-1}|$. Daher folgt, dass

$$|\bar{W}_0(\mathcal{G}^{j+1} - \mathcal{G}^j)|_{j+1} = |\bar{W}_0(\mathcal{G}^j \circ \mathcal{F}^j - \mathcal{G}^j)|_{j+1} \leq |\mathcal{G}^j|_{\mathcal{L},j} |\bar{W}_j(\mathcal{F}^j - \mathrm{id})|_{j+1} \leq c\sqrt{E_j}.$$

Also haben wir den Limes bezüglich der Uniform-Norm

$$\mathcal{G}^j \to \mathcal{G} : \mathbb{T}^n_{\frac{s}{2}} \times \Omega^\tau_\alpha \to D_{r,s} \times O_h$$

Nach (3.3) gilt

$$|\bar{W}_0(\mathcal{G} - \mathrm{id})| \leq c\sqrt{E}.$$

Um die Lipschitz-Konstante von $\mathcal{G} - \mathrm{id}$ abzuschätzen führen wir die Notation $f^j := \mathcal{F}^j - \mathrm{id}$ und $\mathcal{G}^{i,j} := \mathcal{F}^i \circ \ldots \circ \mathcal{F}^{j-1}$ für $i \leq j$, wobei $\mathcal{G}^{j,j} = \mathrm{id}$. Die Formel (3.4) zeigt auch, dass die Lipschitz-Konstante von $\mathcal{G}^{i,j}$ beschränkt durch $\exp(c\sqrt{E_0})$ ist. Dann

$$\mathcal{G}^j - \mathrm{id} = \mathcal{F}^0 \circ \mathcal{G}^{1,j} - \mathrm{id} = \mathcal{G}^{1,j} - \mathrm{id} + f^0 \circ \mathcal{G}^{1,j} = \sum_{i=0}^{j-1} f^i \circ \mathcal{G}^{i+1,j}.$$

Daher ist die Lipschitz-Konstante bezüglich der Metriken $|\bar{W}_0 \cdot|$ auf der Bildmenge $D_{r,s} \times O_h$ und der Standard-Metrik auf der Definitionsmenge und $\mathbb{T}^n_{s/2} \times \Omega^\tau_\alpha$ abgeschätzt durch

$$|\mathcal{G}^j - \mathrm{id}|_{\mathcal{L},j} \leq c \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{\sigma_i} ||\mathcal{F}^i - \mathrm{id}||_{i+1} \leq c \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{E_i} \leq c\frac{\sqrt{E}}{s}.$$

Wir nehmen nun den Limes und bekommen

$$|\mathcal{G} - \mathrm{id}|_{s/2,\mathcal{L}} \leq c\frac{\sqrt{E}}{s}.$$

Wir schreiben $\mathcal{G} = (\Phi, \varphi)$ und bemerken, dass wenn wir die obigen Schritte nur für $\varphi = \lim \psi^0 \circ \ldots \circ \psi^j$ durchführen, bekommen wir die bessere Schranke

$$||\varphi - \mathrm{id})|| < c\sqrt{E}.$$

Schließlich gewinnen wir für Φ aus der Abschätzung für $\mathcal{G}$:

$$\max\left\{s^{-1}|W(\Phi - \Phi^0)|_{s/2},\ |W(\Phi - \Phi^0)|_{s/2,\mathcal{L}}\right\} < c\frac{\sqrt{E}}{s},$$

wobei wir die Standard-Norm wieder benutzt haben. Die Folgen $\mathcal{G}^j$ und H^j genügen den Bedingungen, die in Abschnitt 1.2 enthalten sind. Daher ist Φ die gewünschte Familie von invarianten eingebetteten Tori. Der Beweis des Satzes 1.1 ist somit fertig.

Quellen

- Pöschel, *A Lecture on the Classical KAM Theorem*, Proc. Symp. Pure Math., **69** (2001), 707–732.